ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 65, No. 2, 1989

PROPRIÉTÉS DE CONTRACTION D'UN SEMI-GROUPE DE MATRICES INVERSIBLES. COEFFICIENTS DE LIAPUNOFF D'UN PRODUIT DE MATRICES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

PAR

YVES GUIVARC'H ET ALBERT RAUGI

IRMAR, Institut Mathématiques de Rennes,
Université Rennes I, Campus Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

ABSTRACT

We study in this paper contraction properties of a matrix semi-group $T \subset \mathbf{GL}(d, \mathbf{R})$ acting on the flag space of $\mathbf{R}^d$; then we obtain properties of the Liapunoff exponents of the T-valued products of random matrices. The principal result is that, in this study, we can replace T by its algebraic closure H in $\mathbf{GL}(d, \mathbf{R})$. This implies a "decomposition" of the action of T in a proximal part and an isometric part; then we can write, modulo cohomology, the corresponding cocycle in a block-diagonal form, the blocks being similarities. In fact, we can express the multiplicities of the exponents in terms of the diagonal part of a conjugate of the group H. So we obtain an extension of a recent result of Goldsheid and Margulis about the simplicity of Liapunoff's spectrum [5]; this work uses their ideas as well as those of previous work [6].

I. Notations et présentation des résultats

A. *Présentation algébrique des résultats*

(1.1) Soit $G = \mathbf{GL}(d, \mathbf{R})$ le groupe des matrices carrées inversibles réelles d'ordre $d \geqq 2$. On désigne par $K = \mathbf{O}(d, \mathbf{R})$ le sous-groupe orthogonal de G.

Dans la suite, nous noterons $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $a_1, \ldots, a_d$. Plus généralement nous noterons

Received April 12, 1988 and in revised form January 15, 1989

$\mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_s)$, où $B_1, \ldots, B_s$ sont des matrices carrées de dimension $d_1, \ldots, d_s$ avec $d_1 + \cdots + d_s = d$, la matrice

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \\ & & & B_S \end{bmatrix}.$$

Nous désignons par $\{f_1, \ldots, f_d\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^d$, identifié à l'espace des matrices colonnes d'ordre d. Si $g \in \boldsymbol{G}$, nous notons $\{x_{ij}(g); i, j \in \{1, \ldots, d\}\}$ les coefficients de la matrice g. Pour tout entier $r \geqq 1$, nous notons $\boldsymbol{I}_r$ la matrice identité d'ordre r.

Tout élément g de $\boldsymbol{G}$ s'écrit sous la forme "polaire": $g = k_1 b(g) k_2$ avec $k_1, k_2 \in \boldsymbol{K}$, $b(g) = \mathrm{diag}(b_1(g), \ldots, b_d(g))$ et $0 < b_1(g) \leqq \cdots \leqq b_d(g)$. Les eléments $b_i(g)$ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique ${}^t gg$.

(1.2) Nous appelons Σ l'ensemble $\{1, \ldots, d-1\}$. Nous désignons par $\boldsymbol{B}$ l'ensemble des *drapeaux*; c'est-à-dire l'ensemble des $(d-1)$-uplets de sous-espaces de $\mathbf{R}^d$, $(E_1, \ldots, E_{d-1})$, tels que $\dim E_i = i$ et $E_i \subset E_{i+1}$, $\forall i \in \Sigma$, avec $E_d = \mathbf{R}^d$. Nous appelons *drapeau canonique* l'élément ∂ de $\boldsymbol{B}$ défini par

$$\forall i \in \{1, \ldots, d-1\}, \qquad E_i = \mathbf{R} f_d \oplus \cdots \oplus \mathbf{R} f_{d+1-i}.$$

L'espace des drapeaux $\boldsymbol{B}$ est l'orbite de ce drapeau canonique sous l'action naturelle du groupe linéaire $\boldsymbol{G}$. Si $\boldsymbol{N}$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux égaux à 1, la sous-variété algébrique $\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{N}.\partial$ de $\boldsymbol{B}$ est un ouvert dense dont le complémentaire est constitué de la réunion des sous-variétés algébriques $\boldsymbol{V}_p = \{g.\partial : \Delta_p(g) = 0\}$, $p \in \Sigma$; où

$$\Delta_p(g) = \begin{vmatrix} x_{d+1-p\; d+1-p}(g) & \cdots & x_{d+1-p\; d}(g) \\ \vdots\ \vdots & & \vdots\ \vdots \\ x_{d\; d-1-p}(g) & \cdots & x_{d\,d}(g) \end{vmatrix}.$$

(1.3) Plus généralement, soit $\Theta = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, avec $i_1 < \cdots < i_s$, un sous-ensemble de Σ. Nous appelons $\boldsymbol{B}_\Theta$ l'ensemble des *drapeaux incomplets de type* Θ; c'est-à-dire l'ensemble des s-uplets de sous-espaces de R^d, $(E_{d-i_s}, E_{d-i_{s-1}}, \ldots, E_{d-i_1})$, tels que: $\dim E_i = i$, $\forall i \in d - \Theta$, et $E_i \subset E_j$, $\forall i, j \in d - \Theta$, $i < j$. Nous appelons *drapeau canonique de type* Θ l'élément ∂_Θ de B_Θ tel que $E_{d-i_k} = \mathbf{R} f_d \oplus \cdots \oplus \mathbf{R} f_{i_k+1}$. L'espace $\boldsymbol{B}_\Theta$ des drapeaux incomplets de type Θ est l'orbite de ce drapeau canonique sous l'action naturelle du groupe linéaire $\boldsymbol{G}$. Considérons le sous-groupe N_Θ de N défini par

$$N_\Theta = \left\{ \begin{bmatrix} I_{i_1} & & & & \\ & I_{i_2-i_1} & & (*) & \\ (0) & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & I_{d-i_s} \end{bmatrix} \right\} .$$

La sous-variété algébrique $V_{\Theta,0} = N_\Theta . \partial_\Theta$ de $\boldsymbol{B}_\Theta$ et un ouvert dense dont le complémentaire est constitué de la réunion des sous-variétés algébriques

$$V_{\Theta,p} = \{ g . \partial_\Theta : \Delta_p(g) = 0 \}, \qquad p \in d - \Theta.$$

Au passage on notera que: pour $\Theta = \{d-1\}$, $\boldsymbol{B}_\Theta$ n'est autre que l'espace projectif $\boldsymbol{P}^{d-1}$ de $\mathbf{R}^d$ et pour $\Theta = \Sigma$, $\boldsymbol{B}_\Theta = \boldsymbol{B}$.

(1.4) DÉFINITIONS ([6]).

- Pour tout sous-ensemble Θ de Σ, nous disons qu'une mesure de probabilité ν sur $\boldsymbol{B}_\Theta$ est *irréductible* si: $\forall g \in \boldsymbol{G}$, $g . \nu(V_{\Theta,0}) = 1$. Par exemple la mesure de probabilité $\boldsymbol{K}$-invariante sur $\boldsymbol{B}_\Theta$ est irréductible.
- Une suite $(g_n)_{n \geqq 0}$ d'éléments de $\boldsymbol{G}$ est dite *contractante* si elle vérifie la condition:

$$\forall i \in \{1, \ldots, d-1\}, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_i(g_n)/b_{i+1}(g_n) = 0.$$

Plus généralement, Θ étant un sous-ensemble de Σ, nous disons qu'une suite $(g_n)_{n \geqq 0}$ d'éléments de $\boldsymbol{G}$ est Θ-*contractante* si elle vérifie la condition:

$$\forall i \in \Theta, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_i(g_n)/b_{i+1}(g_n) = 0.$$

Si $(g_n)_{n \geqq 0}$ est une telle suite, la suite de matrices diagonales $(b(g_n))_{n \geqq 0}$ contracte la sous-variété dense $V_{\Theta,0}$ en le drapeau canonique ∂_Θ; c'est-à-dire que

$$\forall u \in V_{\Theta,0}, \qquad \lim_{n \to +\infty} b(g_n) . u = \partial_\Theta.$$

Il n'est pas difficile de voir alors que, pour toute mesure de probabilité irréductible ν sur $\boldsymbol{B}_\Theta$, la suite de mesures $(g_n . \nu)_{n \geqq 0}$ n'admet pour valeurs d'adhérence vague que des mesures de Dirac.

• Un sous-semi-groupe (fermé) T de $\boldsymbol{G}$ est dit *totalement irréductible* s'il n'existe pas des éléments $x, g_1, \ldots, g_r$ de $\boldsymbol{G}$ et un entier $k \in \Sigma$, tels que

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \Delta_k(g_i T x) = \{0\}.$$

Cette condition est vérifiée lorsque, pour tout $k \in \Sigma$, T ne laisse pas invariant une réunion finie de sous-espaces propres de $\wedge_k \mathbf{R}^d$.

(1.5) Soit T un semi-groupe (fermé) totalement irréductible de $\boldsymbol{G}$. Dans ce qui suit on s'intéresse aux sous-ensembles Θ de Σ pour lesquels il existe une suite d'éléments de T qui soit Θ-contractante. En fait il résulte des résultats de [6] que: si T admet une suite Θ_1-contractante et une suite Θ_2-contractante alors T possède aussi une suite $\Theta_1 \cup \Theta_2$-contractante. En posant

$$\Theta = \{i \in \Sigma : \inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in T\} = 0\},$$

on obtient alors le plus grand sous-ensemble de Σ possèdant la propriété considérée.

Lorsque T est contenu, modulo les matrices scalaires, dans un conjugué du sous-groupe orthogonal $\boldsymbol{K}$, il est clair que $\Theta = \varnothing$. Lorsque T contient une matrice à valeurs propres réelles, distinctes en valeur absolue, il est clair que $\Theta = \Sigma$. Lorsque le semi-groupe T est d'intérieur non vide il n'est pas difficile de montrer ([3]) que $\Theta = \Sigma$. Récemment I. Y. Goldsheid et G. A. Margulis ont montré de façon purement algébrique ([5]) que si T est *algébriquement dense* alors $\Theta = \Sigma$. En nous inspirant de leur article et en ajoutant des arguments probabilistes, nous obtenons le résultat plus précis suivant.

(1.6) Appelons H l'adhérence algébrique du semi-groupe T (c'est-à-dire la partie de $\boldsymbol{G}$ formée des zéros des polynômes à coefficients réels nuls sur T); c'est un *sous-groupe fermé* de $\boldsymbol{G}$ d'un type particulier. Nous montrons alors que:

(i) *l'ensemble Θ est aussi égal à l'ensemble des entiers $i \in \Sigma$ pour lesquels $\inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in H\}$ est nul. Il s'ensuit immédiatement que Θ possède la propriété de symétrie suivante*: $i \in \Theta \Leftrightarrow d + 1 - i \in \Theta$.

(ii) *Il existe un conjugué H' de H tel que*

$$\forall g \in H', \quad \forall i \notin \Theta, \qquad b_i(g) = b_{i+1}(g).$$

En outre, l'orbite $L' = H' \cdot \partial_\Theta$ est la seule orbite fermée de H' sur $\boldsymbol{B}_\Theta$. L'espace des drapeaux incomplets $\boldsymbol{B}_\Theta$ est un quotient de l'espace des drapeaux $\boldsymbol{B}$; appelons η l'application naturelle de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{B}_\Theta$. L'action de H' sur l'image réciproque de l'orbite fermée L' par η est isométrique relativement à L'; c'est-à-dire que, relativement à une métrique riemannienne naturelle sur l'espace des drapeaux, cette action conserve la distance de deux points quelconques de $\eta^{-1}(L')$ qui se projettent sur le même point de L'.

B. *Motivations probabilistes*

1. *Produits de matrices aléatoires indépendantes*

(1.7) Soit μ une mesure de probabilité sur $\boldsymbol{G}$. Nous désignons: par T_μ le sous-semi-groupe fermé de $\boldsymbol{G}$ engendré par le support de μ et par H_μ l'adhérence algébrique de T_μ. H_μ est un sous-groupe fermé de $\boldsymbol{G}$. Nous supposons que T_μ (ou H_μ) est totalement irréductible. Soit $\{Y_k; k \geqq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi μ, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Nous posons:

$$\Theta = \{i \in \Sigma : \inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in T_\mu\} = 0\}.$$

Nous considérons les produits de matrices: $X_n = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ $(n \geqq 1)$. A l'aide d'un argument de martingale on obtient le résultat suivant ([6]):

Pour $\mathbf{P}$*-presque tout* $\omega \in \Omega$, *la suite* $(X_n(\omega))_{n \geqq 1}$ *est* Θ*-contractante et il existe une variable aléatoire* Z *telle que pour toute mesure de probabilité irréductible* ν *sur* $\boldsymbol{B}_\Theta$ *la suite de mesures* $(X_n(\omega) \,.\, \nu)_{n \geqq 1}$ *converge vers la mesure de Dirac* $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

Autrement dit, "étant donné un sous-semi-groupe totalement irréductible T de $\boldsymbol{G}$, en marchant au hasard sur T, suivant une loi μ telle que $T_\mu = T$, on rassemble toutes les propriétés de contraction présentes dans T ou H". Nous avons donc:

(i) $\forall i \in \Theta$, $\lim_{n \to +\infty} b_i(X_n)/b_{i+1}(X_n) = 0$,

(ii) si $X_n = x_n b(X_n) k_n$ est une décomposition polaire de la matrice X_n, alors la suite de drapeaux incomplets, $\{x_n \,.\, \partial_\Theta\}_{n \geqq 1}$, converge $\mathbf{P}$-p.s. vers Z.

(1.8) Notons $H'_\mu = c^{-1} H_\mu c$ avec $c \in \boldsymbol{G}$, le conjugué de H_μ intervenant en ((1.6)(ii)). Alors il existe une décomposition polaire $x'_n b(c^{-1} X_n c) k'_n$ de la matrice $c^{-1} X_n c$ telle que:

(i) La suite des composantes $\{x'_n\}_{n \geqq 1}$ converge $\mathbf{P}$-p.s. vers une variable aléatoire x'_∞ vérifiant $x'_\infty \,.\, \partial_\Theta = Z$.

(ii) $\forall i \notin \Theta$, $b_i(c^{-1} X_n c) = b_{i+1}(c^{-1} X_n c)$ et

$$\forall i \in \Theta, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_i(c^{-1} X_n c)/b_{i+1}(c^{-1} X_n c) = 0.$$

En outre si on écrit $c^{-1}X_nc = N'_nA'_nK'_n$ avec $N'_n \in \boldsymbol{N}$, $A'_n \in \boldsymbol{A}$, $K'_n \in \boldsymbol{K}$, alors la suite $\{N'_n\}_{n \geqq 1}$ converge **P**-p.s. vers une variable aléatoire V à valeurs dans $\boldsymbol{N}$.

2. *Coefficients de Liapunoff*

A l'hypothèse d'irréductibilité de T_μ nous ajoutons dorénavant la condition: $\int_G \operatorname{Log} \| g^{\pm 1} \| \mu(dg) < +\infty$. Si M est une matrice carrée ou non, nous désignons par ${}^tM$ la matrice *transposée* de M.

(1.9) Les résultats précédents permettent alors de montrer que:

(i) *Pour tout entier* $i \in \Sigma$, *la suite* $((1/n)\operatorname{Log} b_i(X_n))_{n \geqq 1}$ *converge* **P**-p.s. *vers un réel* τ_i; *ces réels vérifient les relations*

$$\tau_1 = \cdots = \tau_{i_1} < \tau_{i_1+1} = \cdots = \tau_{i_2} < \cdots < \tau_{i_s+1} = \cdots = \tau_d,$$

où $\boldsymbol{\Theta} = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $i_1 < \cdots < i_s$.

(ii) *La suite de matrices définies positives* $\{(X_n{}^tX_n)^{1/2n}\}_{n \geqq 1}$ *converge* **P**-p.s. *vers une matrice de la forme*

$$x_\infty \operatorname{diag}((\operatorname{Exp} \lambda_1)I_{i_1}, (\operatorname{Exp} \lambda_2)I_{i_2-i_1}, \ldots, (\operatorname{Exp} \lambda_{s+1})I_{d-i_s})(x_\infty)^{-1},$$

où x_∞ *est une v.a. à valeurs dans* $\boldsymbol{K}$ *et* $\forall j \in \{1, \ldots, s+1\}$, $\lambda_j = \tau_{i_j}$ $(i_{s+1} = d)$.

(iii) *Appelons* $\{e_1, \ldots, e_d\}$ *la base canonique de l'espace vectoriel, noté* ${}^t\mathbf{R}^d$, *des matrices lignes d'ordre* d. *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$, *les suites*

$$\left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_iV^{-1}c^{-1}X_n \|\right)_{n \geqq 1} \quad \textit{et} \quad \left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_ix'^{-1}_\infty c^{-1}X_n \|\right)_{n \geqq 1}$$

converge **P**-p.s. *vers le réel* τ_i.

(1.10) Considérons à présent une suite $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes et de loi μ, indexée par $\mathbf{Z}$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega = G^{\mathbf{Z}}, \mathscr{B}(\Omega), \mathbf{P})$. Posons:

$$S_n = Y_0 \cdots Y_{n-1}, \quad \text{si } n > 0; \quad S_n = I, \quad \text{si } n = 0;$$

et

$$S_n = Y_{-1}^{-1} \cdots Y_n^{-1} \quad \text{si } n < 0.$$

La suite de v.a. $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ vérifie, vis-à-vis du shift θ sur $G^{\mathbf{Z}}$, la relation de cocycle: $\forall n, m \in \mathbf{Z}$, $S_{m+n} = S_nS_m \circ \theta^n$.

De l'assertion (iii) de (1.9), il s'ensuit qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2 à valeurs dans $\boldsymbol{N}$ telles que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_i U_1^{-1} X_n \| = \tau_i$$

et

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_i U_2^{-1} X_n \| = -\tau_{d+1-i}.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, posons:

$$V_j^+ = \left\{ u \in {}^t\mathbf{R}^d : \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| uX_n \| \leqq \lambda_j \right\}$$

et

$$V_j^- = \left\{ u \in {}^t\mathbf{R}^d : \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \operatorname{Log} \| uX_n \| \leqq -\lambda_j \right\}.$$

Les sous-espaces V_j^+ et V_j^- s'expriment simplement à l'aide des variables aléatoires U_1 et U_2. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, l'espace $E_j = V_j^+ \cap V_j^-$ est, $\mathbf{P}$-p.s., de dimension $i_j - i_{j-1}$ ($i_0 = 0$), et pour tout $u \in E_j$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| uX_n \| = \lambda_j.$$

Nous en déduisons alors l'existence d'une variable aléatoire Φ à valeurs dans $\boldsymbol{G}$ et d'une suite de matrices

$$D_n = \operatorname{diag}(c_1(n)K_1(n), \ldots, c_{s+1}(n)K_{s+1}(n))$$

telles que:

- $\forall j \in \{1, \ldots, s+1\}, \qquad c_j(n) > 0 \quad \text{et} \quad K_j \in \boldsymbol{O}(i_j - i_{j-1}),$

- $\forall j \in \{1, \ldots, s+1\}, \qquad \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_j(n) = \lambda_j,$

- $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| \Phi^{\pm 1} \circ \theta^n \| = 0,$

- $\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad S_n = \Phi D_n (\Phi^{-1} \circ \theta^n).$

Nous obtenons donc une généralisation des résultats de [6] au cas où Θ est différent de Σ. Nous retrouvons ainsi, *en les précisant*, les résultats de [8] et [9], dans la situation envisagée ici.

II. Préliminaires

Les préliminaires comportent quatre parties. Dans une première partie, après un bref rappel des décompositions classiques du groupe linéaire, nous introduisons une nouvelle décomposition qui joue un rôle essentiel dans la suite. Dans la deuxième partie, nous introduisons des applications "quasi-projectives" sur les espaces de drapeaux et nous étudions leurs ensembles de continuité. Dans la troisième partie, nous rappelons brièvement les résultats de [6] qui nous serviront. Enfin nous terminons par une remarque permettant d'affaiblir les hypothèses de validité de ces résultats.

A. *Décompositions du groupe linéaire*

(2.1) Soit $G(d) = GL(d, \mathbf{R})$ le groupe des matrices carrées inversibles réelles d'ordre $d \geqq 2$. On convient que $G(1) = (\mathbf{R} - \{0\}, \times)$.

On désigne: par $N(d)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux égaux à 1; par $\tilde{N}(d)$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures à éléments diagonaux égaux à 1; par $A(d)$ le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients strictement positifs; par $O(d)$ le sous-groupe des matrices orthogonales; par $M(d)$ le centralisateur de $A(d)$ dans $O(d)$; par $M'(d)$ le normalisateur de $A(d)$ dans $O(d)$. Nous omettons la dimension d lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Nous avons $M = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) : \varepsilon_i = \pm 1\}$. Si S_d désigne le groupe des permutations des d premiers entiers, nous avons:

$$M' = \{g \in G : \exists \sigma \in S_d, \forall i \in \{1, \ldots, d\}, x_{i\sigma(i)}(g) = \pm 1 \text{ et } \forall j \neq \sigma(i), x_{ij}(g) = 0\}.$$

Le groupe G opère de façon naturelle sur l'espace des drapeaux B (voir (1.2)). Le stabilisateur du drapeau canonique ∂ dans G est le sous-groupe $AM\tilde{N}$ des matrices triangulaires inférieures. L'ensemble des drapeaux B s'identifie donc à l'espace homogène $G/AM\tilde{N}$ de G.

Les mineurs Δ_p, $p \in \Sigma$, introduits en (1.2) possèdent les propriétés suivantes.

(2.2) LEMME. *Pour tout $g \in G$ et pour tout $p \in \{1, \ldots, d\}$, nous avons*:

(i) $\forall u \in N$, $\forall v \in \tilde{N}$, $\Delta_p(ugv) = \Delta_p(g)$;

(ii) $\forall a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d) \in A$, $\Delta_p(ag) = \Delta_p(ga) = a_{d+1-p} \cdots a_d \Delta_p(g)$.

(2.3) Le groupe $\mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$ possède les décompositions classiques suivantes.

(1) *Décomposition d'Iwasawa*. $G = NAK$ (*ou* $G = \tilde{N}AK$, KAN, $KA\tilde{N}$). Tout élément g de G s'écrit de façon unique sous la forme:

$$g = u(g)a(g)k(g) \qquad \text{avec } u(g) \in N, \quad a(g) \in A \quad \text{et} \quad k(g) \in K.$$

Les applications $g \to u(g)$, $g \to a(g)k(g)$ et $g \to a^2(g)$ sont polynomiales. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, l'application $g \to x_{ij}^2(k(g))$ est rationnelle avec des dénominateurs ne s'annulant pas sur $\mathbf{GL}(d, \mathbf{R})$.

[Cette décomposition s'obtient en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt aux vecteurs lignes de la matrice g, en partant du dernier vecteur ligne de g.]

(2) *Décomposition polaire.* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K}(\operatorname{Exp} \bar{W})\boldsymbol{K}$. Tout élément g de $\boldsymbol{G}$ s'écrit $k_1 b(g) k_2$ avec $k_1, k_2 \in \boldsymbol{K}$ et $b(g) \in \operatorname{Exp} \bar{W}$, où

$$\bar{W} = \{\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) : (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d, x_1 \leqq \cdots \leqq x_d\}.$$

L'élément $b(g)$ est unique. Lorsque $b(g)$ appartient à $\operatorname{Exp} W$, où $W = \{\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) : x_1 < \cdots < x_d\}$, les autres décompositions de g s'obtiennent en remplacant le couple (k_1, k_2) par $(k_1 m, m^{-1} k_2)$ avec $m \in M$.

(3) *Décomposition de Bruhat.* $\boldsymbol{G} = \bigcup_{m \in \boldsymbol{M}'/\boldsymbol{M}} \boldsymbol{N} m \boldsymbol{A} \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{N}}$. Tout élément g de $\boldsymbol{G}$ tel que $\Delta_p(g) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, s'écrit de façon unique $g = v(g)c(g)\tilde{v}(g)$ avec $v(g) \in \boldsymbol{N}$, $c(g) \in \boldsymbol{AM}$, $\tilde{v}(g) \in \tilde{\boldsymbol{N}}$. Nous avons:

$$c(g) = \operatorname{diag}(\Delta_d(g)/\Delta_{d-1}(g), \ldots, \Delta_2(g)/\Delta_1(g), \Delta_1(g)) \qquad \text{(lemme (2.2))}.$$

Les applications $g \to v(g)$, $g \to c(g)$ et $g \to \tilde{v}(g)$ sont rationnelles et les dénominateurs sont des produits de mineurs $\Delta_p(g)$, $p \in \{1, \ldots, d\}$.

[Pour obtenir une telle décomposition, il suffit de remarquer que g et $v(g)$ donnent la même image au drapeau canonique ∂ (voir (1.2)); ce qui permet de déterminer de proche en proche toutes les colonnes de $v(g)$, en partant de la dernière. Pour $\tilde{v}(g)$, on opère de façon duale.]

Ceci dit choisissons des représentants m_k, $1 \leqq k \leqq d!$, dans $\boldsymbol{M}'$ des éléments de $\boldsymbol{M}'/\boldsymbol{M}$. Alors $\boldsymbol{G}$ est la réunion disjointe des sous variétés $\boldsymbol{N} m_k \boldsymbol{A} \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{N}}$. L'ensemble $\boldsymbol{N}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{N}}$ est une sous-variété ouverte de $\boldsymbol{G}$ et les autres sont des sous-variétés de dimensions strictement plus petites.

(2.4) Soit $\Theta = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, avec $i_1 < \cdots < i_s$, un sous-ensemble de Σ. Le groupe $\boldsymbol{G}$ opère de façon naturelle sur l'espace $\boldsymbol{B}_\Theta$ des drapeaux incomplets de type Θ (voir (1.3)). Considérons le sous-groupe *parabolique* suivant de $\boldsymbol{G}$:

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta = \left\{ \begin{bmatrix} G_{i_1} & & & \\ & G_{i_2 - i_1} & (0) & \\ & & \cdot & \\ (*) & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & & G_{d-i_s} \end{bmatrix} : \forall j \in \{i_1, i_2 - i_1, \ldots, d - i_s\}, G_j \in G(j) \right\}.$$

Le stabilisateur dans G du drapeau canonique incomplet ∂_Θ est $\tilde{P}_\Theta$; l'ensemble B_Θ s'identifie donc à l'espace homogène $G/\tilde{P}_\Theta$.

On notera qu'avec ces notations nous avons: $B_\Sigma = B$; $N_\Sigma = N$; $\tilde{P}_\Sigma = AM\tilde{N}$ et $\partial_\Sigma = \partial$.

Nous introduisons, à présent, d'autres décompositions du groupe linéaire. Ces décompositions intermédiaires entre celles d'Iwasawa et de Bruhat nous sont utiles pour la suite.

(2.5) Nous associons à Θ les sous-groupes suivants de G:

$$A_\Theta = \{\mathrm{diag}(A_{i_1}, A_{i_2-i_1}, \ldots, A_{d-i_s}) : \forall j \in \{i_1, i_2 - i_1, \ldots, d - i_s\},$$
$$A_j \in A(j), \det A_j = 1\};$$

$$A_\theta = \{\mathrm{diag}(a_1 I_{i_1}, a_2 I_{i_2-i_1}, \ldots, a_{s+1} I_{d-i_s}) : \forall j \in \{1, \ldots, s+1\}, a_j > 0\};$$

$$K_\Theta = \{\mathrm{diag}(K_{i_1}, K_{i_2-i_1}, \ldots, K_{d-i_s}) : \forall j \in \{i_1, i_2 - i_1, \ldots, d - i_s\}, K_j \in O(j)\};$$

$$G_\Theta = \{\mathrm{diag}(G_{i_1}, G_{i_2-i_1}, \ldots, G_{d-i_s}) : \forall j \in \{i_1, i_2 - i_1, \ldots, d - i_s\}, G_j \in G(j)\};$$

$$N_\Theta = \{\mathrm{diag}(N_{i_1}, N_{i_2-i_1}, \ldots, N_{d-i_s}) : \forall j \in \{i_i, i_2 - i_1, \ldots, d - i_s\}, N_j \in N(j)\};$$

$$\tilde{N}_\Theta = {}^t N_\Theta, \tilde{N}_\theta = {}^t N_\theta \text{ (voir (1.3))}, P_\Theta = {}^t\tilde{P}_\Theta;$$

$$H_\Theta = \{\mathrm{diag}(S_{i_1}, S_{i_2-i_1}, \ldots, S_{d-i_s}) : \forall j \in \{i_1, \ldots, d - i_s\},$$
$$S_j \in G(j), \det S_j = \pm 1\}.$$

Le groupe G_Θ est isomorphe à un produit direct de groupes linéaires et sa partie semi-simple n'est autre que H_Θ. On vérifie facilement que G_Θ est le centralisateur de A_θ dans G et il normalise les sous-groupes N_θ et $\tilde{N}_\theta$. Nous avons $G_\Theta = H_\Theta A_\theta$ et $\tilde{P}_\Theta = K_\Theta A\tilde{N}$, avec décomposition unique.

Tout élément de A s'écrit de façon unique comme produit d'éléments de A_Θ et A_θ. Le groupe N_θ est un sous-groupe distingué fermé de N; tout élément g de N s'écrit de façon unique $g = u_1(g)u_2(g)$ avec $u_1(g) \in N_\theta$ et $u_2(g) \in N_\Theta$ et les applications $g \to u_1(g)$, $g \to u_2(g)$ sont polynomiales.

L'espace des drapeaux B est fibré au dessus de B_Θ. La fibre s'identifie à l'ensemble $D_\Theta = \tilde{P}_\Theta \,.\, \partial_{\Theta^c}$ des drapeaux complétant le drapeau incomplet ∂_Θ; en effet la fibre au dessus de l'élément $g \,.\, \partial_\Theta$ de B_Θ est égale à $g \,.\, D_\Theta$. Cette fibre s'écrit donc $D_\Theta = \tilde{P}_\Theta / MA\tilde{N} = K_\Theta / M$ et s'identifie aux espaces homogènes

$G_\Theta/MA\tilde{N}_\Theta$ et $H_\Theta/MA_\Theta\tilde{N}_\Theta$. D_Θ apparaît donc comme le produit des espaces de drapeaux des groupes linéaires constituant G_Θ.

(2.6) Le groupe H_Θ est isomorphe au produit direct de groupes

$$SL(d_i, \mathbf{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(d_i, \mathbf{R}) : \det g = \pm 1\}.$$

Ce groupe semi-simple admet les décompositions suivantes:

Décomposition d'Iwasawa:

$$H_\Theta = N_\Theta A_\Theta K_\Theta [\text{resp. } \tilde{N}_\Theta A_\Theta K_\Theta, K_\Theta A_\Theta N_\Theta, K_\Theta A_\Theta \tilde{N}_\Theta].$$

Décomposition polaire:

$$H_\Theta = K_\Theta\{\mathrm{diag}(A_{i_1}, A_{i_2 - i_1}, \dots, A_{d-i_s}) \in A_\Theta : \forall j \in \{i_1, \dots, d - i_s\},$$
$$A_j \in \mathrm{Exp}\, \bar{W}(j)\} K_\Theta.$$

Décomposition de Bruhat:

$$H_\Theta = \bigcup_{m \in M_\Theta/M} N_\Theta m A_\Theta M \tilde{N}_\Theta.$$

Tout élément g de G_Θ vérifie $\Delta_p(g) \neq 0$, pour tout $p \in d - \Theta$. Un élément g de H_Θ appartient à $N_\Theta A_\Theta M_\Theta \tilde{N}_\Theta$ si et seulement si $\Delta_p(g) \neq 0$, $\forall\, p \in \Sigma$.

(2.7) Soit $\{m_k; 1 \leqq k \leqq (d! - i!(i_2 - i_1)! \cdots (d - i_s)!)\}$ des représentants de M'/M'_Θ dans M'. Alors G est la réunion disjointe des sous-variétés $N_{\bar\Theta}\, m_k G_\Theta \tilde{N}_{\bar\Theta}$. La sous-variété

$$N_{\bar\Theta} G_\Theta \tilde{N}_{\bar\Theta} = N_{\bar\Theta} H_\Theta A_{\bar\Theta} \tilde{N}_{\bar\Theta} = N_{\bar\Theta} \tilde{P}_\Theta$$

est ouverte dans G; les autres sont de dimensions strictement plus petites. Tout élément g de G vérifiant $\Delta_p(g) \neq 0$, $\forall\, p \in d - \Theta$, s'écrit de façon unique: $g = \nu_{\bar\Theta}(g)\rho_\Theta(g)a_{\bar\Theta}(g)\tilde{\nu}_{\bar\Theta}(g)$, avec $\nu_{\bar\Theta}(g) \in N_{\bar\Theta}$, $\rho_\Theta(g) \in H_\Theta$, $a_{\bar\Theta}(g) \in A_{\bar\Theta}$ et $\tilde{\nu}_{\bar\Theta}(g) \in \tilde{N}_{\bar\Theta}$. Les applications $g \to \nu_{\bar\Theta}(g)$, $g \to \rho_\Theta(g)$, $g \to a_{\bar\Theta}(g)$ et $g \to \tilde{\nu}_{\bar\Theta}(g)$ sont rationnelles et les dénominateurs sont des produits de mineurs $\{\Delta_p(g), p \in d - \Theta\}$. [Pour obtenir une telle décomposition, il suffit de remarquer que g et $\nu_{\bar\Theta}(g)$ donnent la même image au drapeau incomplet ∂_Θ; ce qui détermine de proche en proche les colonnes de $\nu_{\bar\Theta}(g)$. La composante $\tilde{\nu}_{\bar\Theta}(g)$ s'obtient de façon duale.]

B. *Applications quasi-projectives et mesures de probabilité irréductibles sur la frontière*

(2.8) Nous désignons par ζ l'application naturelle de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}/\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{N}}$. Nous savons (décomposition de Bruhat) que

$$\boldsymbol{B}=\bigcup_{1\leqq k\leqq d!}\zeta(\boldsymbol{N}m_k).$$

Pour tout sous-ensemble Θ de Σ, nous définissons une transformation τ_Θ de $\boldsymbol{B}$ en posant, pour $u\in\boldsymbol{N}$ et $m\in\boldsymbol{M}'$, $\tau_\Theta(\zeta(um))=\zeta(vm))$ où v est la matrice de $\boldsymbol{N}$ définie par: $\forall\, 1\leqq i<j\leqq d$, $x_{ij}(v)=\delta_i\delta_{i+1}\cdots\delta_{j-1}x_{ij}(u)$ avec $\delta_i=0$ si $i\in\Theta$; 1 sinon. L'application $\tau_\varnothing$ est l'identité de $\boldsymbol{B}$. Si on écrit $v=v_1v_2$ avec $v_1\in\boldsymbol{N}_{\bar\Theta}$, $v_2\in\boldsymbol{N}_\Theta$, on vérifie que $\tau_\Theta(\zeta(vm))=\zeta(v_2m)$, $\forall\, m\in\boldsymbol{M}'$. En particulier τ_Θ envoie $\zeta(\boldsymbol{N}m_k)$, $m_k\in\boldsymbol{M}'_\Theta$, dans la fibre $\zeta(\boldsymbol{K}_\Theta)\approx\boldsymbol{D}_\Theta$ et τ_Θ se réduit à l'identité sur l'ouvert dense $\zeta(\boldsymbol{N}_\Theta)$ de cette fibre.

Soit $b(n)=\operatorname{diag}(b_1(n),\ldots,b_n(n))$ une suite d'éléments de Exp $\bar{\boldsymbol{W}}$ telle que pour tout $i\in\Sigma$, la suite réelle positive $b_i(n)/b_{i+1}(n)$ converge vers $\tau_i\in[0,1]$. Soit $\Theta=\{i\in\Sigma:\tau_i=0\}$. Ecrivons $b(n)=d(n)\bar{d}(n)$ avec $d(n)\in\boldsymbol{A}_\Theta$ et $\bar{d}(n)\in\boldsymbol{A}_{\bar\Theta}$. Il est clair que: $\lim_{n\to+\infty}d(n)=d\in\boldsymbol{A}_\Theta$; $\forall\, x\in\boldsymbol{B}$, $\lim_{n\to+\infty}\bar{d}(n)\,.\,x=\tau_\Theta x$ et $\lim_{n\to+\infty}b(n)\,.\,x=d\tau_\Theta x$.

Nous avons: $\tau_\Sigma(\zeta(\boldsymbol{N}m))=\zeta(m)$, $\forall\, m\in\boldsymbol{M}'$; et la transformation τ_Σ de $\boldsymbol{B}$ est une transformation continue sur l'ouvert dense $\zeta(\boldsymbol{N})$.

Plus généralement nous avons le lemme suivant:

(2.9) Lemme. *L'ensemble de continuité de τ_Θ est la sous-variété*

$$\zeta(\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}'_\Theta)=\zeta(\boldsymbol{N}_{\bar\Theta}\boldsymbol{K}_\Theta).$$

Preuve. Il est clair que l'ouvert dense $\zeta(\boldsymbol{N})$ fait partie de cet ensemble. Soit $v=\zeta(um)$ avec $u\in\boldsymbol{N}$ et $m\in\boldsymbol{M}'_\Theta$. Nous avons

$$\begin{aligned} b(n)\,.\,v&=b(n)m\,.\,w \qquad (\text{où } w=m^{-1}\,.\,v)\\ &=d(n)m\bar{d}(n)\,.\,w \end{aligned}$$

car $\boldsymbol{K}_\Theta$ (et donc $\boldsymbol{M}'_\Theta$) centralise $\boldsymbol{A}_{\bar\Theta}$. D'où $\lim_{n\to+\infty}b(n)\,.\,v=dm\tau_\Theta m^{-1}\,.\,v$; autrement dit nous avons

$$(*)\qquad d\tau_\Theta\,.\,v=dm\tau_\Theta m^{-1}\,.\,v,\qquad \forall\, v\in\zeta(\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}'_\Theta).$$

Soit alors $(v_n)_{n\geqq 0}$ une suite d'éléments de $\boldsymbol{B}$ convergeant vers $v\in\zeta(\boldsymbol{N}m)$, avec $m\in\boldsymbol{M}'_\Theta$. La suite $m^{-1}\,.\,v_n$ converge vers $m^{-1}\,.\,v\in\zeta(\boldsymbol{N})$. L'application τ_Θ étant continue sur l'ouvert partout dense $\zeta(\boldsymbol{N})$ de $\boldsymbol{B}$, la relation $(*)$ montre que $\lim_{n\to+\infty}\tau_\Theta\,.\,v_n=\tau_\Theta\,.\,v$. L'ensemble de continuité de τ_Θ contient donc $\zeta(\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}'_\Theta)$.

Soit ζ_Θ l'application naturelle de G sur $G/\tilde{P}_\Theta$, avec $\tilde{P}_\Theta = K_\Theta A\tilde{N}$. Appelons $\bar{\tau}_\Theta$ la transformation induite par τ_Θ sur $G/\tilde{P}_\Theta$. Nous avons $\bar{\tau}_\Theta(\zeta_\Theta(N_\Theta m)) = \zeta_\Theta(m)$, pour tout $m \in M'/M'_\Theta$; ce qui montre que l'ensemble de continuité de τ_Θ est exactement $\zeta(NM'_\Theta)$.

(2.10) *Applications quasi-projectives*. Soit $(g_n)_{n \geqq 0}$ une suite d'éléments de G. Ecrivons:

$$g_n = x_n b_n k_n, \quad \text{avec } x_n, k_n \in K, \quad b_n = \operatorname{diag}(b_1(n), \ldots, b_d(n)) \in \operatorname{Exp} \bar{W}.$$

Considérons une suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geqq 0}$ telle que:

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = x, \qquad \lim_{n \to +\infty} k_{\varphi(n)} = k$$

et

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_i(\varphi(n))/b_{i+1}(\varphi(n)) = \tau_i.$$

Soit $\Theta = \{i \in \Sigma : \tau_i = 0\}$. Alors pour tout $v \in \zeta(k^{-1}NM'_\Theta)$,

$$\lim_{n \to \infty} g_{\varphi(n)} \cdot v = xd\tau_\Theta k \cdot v, \qquad \text{pour un certain } d \in A_\Theta.$$

En outre l'application *quasi-projective* $xd\tau_\Theta k$ est continue sur $\zeta(k^{-1}NM'_\Theta)$.

(2.11) LEMME. *Soit ν une mesure de probabilité irréductible sur les boréliens de B (voir (1.4)). Alors $K_\nu = \{g \in G : \det g = \pm 1$ et $g \cdot \nu = \nu\}$ est un sous-groupe compact de G et est donc contenu dans un conjugué du groupe orthogonal.*

PREUVE. Soit $(g_n)_{n \geqq 0}$ une suite d'éléments de K_ν. Nous avons $g_n \cdot \nu = \nu$, $\forall n \geqq 0$. Soit $xd\tau_\Theta k$ une valeur d'adhérence quasi-projective de la suite $(g_n)_{n \geqq 0}$ (voir (2.10)). Puisque ν est irréductible, il vient $xd\tau_\Theta k \cdot \nu = \nu$; ce qui n'est possible que si $\Theta = \varnothing$. [En effet dans le cas contraire ν serait portée par $xd\tau_\Theta \zeta(N) = xd\zeta(N_\Theta)$. Mais si m est la matrice de M' définie par

$$m = \begin{bmatrix} & (0) & & & I_{d-i_s} \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & I_{i_2-i_1} & & & (0) \\ I_{i_1} & & & & \end{bmatrix},$$

le sous-groupe N_Θ est contenu dans mNm^{-1}; et par suite la mesure ν serait portée par $xdm.\zeta(Nm^{-1})$; ce qui contredit l'irréductibilité de ν.] D'où le résultat.

(2.12) Considérons l'espace homogène $\boldsymbol{D}_\Theta = \boldsymbol{H}_\Theta / \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_\Theta \tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta$ de $\boldsymbol{H}_\Theta$ qui s'identifie à la sous-variété $\zeta(\boldsymbol{H}_\Theta) = \zeta(\boldsymbol{K}_\Theta)$ de $\boldsymbol{B}$. Nous disons qu'une mesure de probabilité $\bar{\nu}$ sur $\boldsymbol{D}_\Theta$ est *irréductible* si

$$h.\bar{\nu}(\zeta(N_\Theta)) = 1, \qquad \forall h \in \boldsymbol{H}_\Theta.$$

Il est clair que l'on a:

(2.13) LEMME. *Soit $\bar{\nu}$ une mesure de probabilité irréductible sur les boréliens de $\boldsymbol{D}_\Theta$. Alors $\boldsymbol{K}_{\bar{\nu}} = \{g \in \boldsymbol{H}_\Theta : g.\bar{\nu} = \bar{\nu}\}$ est un sous-groupe compact de $\boldsymbol{H}_\Theta$ et est donc contenu dans un conjugué du groupe $\boldsymbol{K}_\Theta$.*

(2.14) Soit g un élément de $\boldsymbol{G}$ tel que $\Delta_p(g) \neq 0$, $\forall p \in d - \Theta$. La matrice g appartient à $N_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta = N_\Theta \boldsymbol{H}_\Theta \boldsymbol{A}_\Theta \tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta$. Puisque $\boldsymbol{K}_\Theta$ normalise $\tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta$ et centralise $\boldsymbol{A}_\Theta$, pour tout $k \in \boldsymbol{K}_\Theta$, nous avons:

$$\tau_\Theta g.\zeta(k) = \rho_\Theta(g).\zeta(k).$$

(2.15) LEMME. *Soit ν une mesure de probabilité irréductible sur $\boldsymbol{B}$. Alors $\tau_\Theta.\nu$ est une mesure de probabilité irréductible sur $\boldsymbol{D}_\Theta = \zeta(\boldsymbol{K}_\Theta)$.*

C. *Rappel des Résultats de* [6]

(2.16) Soit μ une mesure de probabilité sur $\boldsymbol{G} = \mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$. Nous appelons T_μ le sous-semi-groupe fermé de $\boldsymbol{G}$ engendré par le support de μ. Nous supposons que T_μ est totalement irréductible (voir (1.4)). Cette hypothèse équivaut à dire ([6], (2.5)) qu'il n'existe pas des éléments $x, g_1, \ldots, g_r$ de $\boldsymbol{G}$ tels que

$$T_\mu \subset \bigcup_{1 \leqq i \leqq r} g_i (NMA\tilde{N})^c x.$$

Sous cette hypothèse, nous savons (voir [6] lemme (2.12)) que toute mesure de probabilité μ-invariante ν sur $\boldsymbol{B}$ est irréductible (déf (1.4)).

Soit $\{Y_k; k \geqq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi μ, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soient $\{y_n\}_{n \geqq 1}$ et $\{g_n\}_{n \geqq 1}$ deux suites d'éléments de $\boldsymbol{G}$ convergeant respectivement vers y et g. Nous notons respectivement $x_n \operatorname{diag}(b_1(n), \ldots, b_d(n))k_n$ et $N_n \operatorname{diag}(a_1(n), \ldots, a_d(n))K_n$ les décompositions polaire et d'Iwasawa du produit de matrices $y_n Y_1 \cdots Y_n g_n$. Nous posons:

$$\Theta_\mu = \{i \in \Sigma : \inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in T_\mu\} = 0.$$

Dans la suite nous omettons l'indice μ pour alléger l'écriture.

Nous avons alors le résultats suivants concernant le comportement asymptotique des différentes composantes.

(2.17) THÉORÈME ([6] Théorème (2.19) et corollaire (2.20)). *Avec les notations et hypothèses précédentes, nous avons:*

(i) *Il existe sur l'espace homogène* $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ [*resp.* $\boldsymbol{P}_\Theta\backslash\boldsymbol{G}$] *une unique mesure* μ*-invariante* λ [*resp.* $\tilde{\lambda}$]. *Cette mesure est irréductible. La suite de mesures de probabilité* $\{y_n Y_1 \cdots Y_n g_n . \lambda\}_{n\geqq 1}$ *sur* $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$, *converge* **P**-p.s. *vers une mesure de Dirac* $\varepsilon_{y.Z}$, *où* Z *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ *de loi* λ.

(ii) *L'image de* x_n *sur* $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ *converge* **P**-p.s. *vers* $y . Z$.

(iii) $\forall i \in \Theta$, $\lim_{n\to+\infty} b_i(n)/b_{i+1}(n) = 0$;
en outre si $\int \mathrm{Log}\, \| g^{\pm 1} \| \,\mu(dg) < +\infty$, *alors*, **P**-p.s.,

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Log}\, b_i(n) = \tau_i \in \mathbf{R}$$

avec $\tau_i < \tau_{i+1}$ *si* $i \in \Theta$ *et* $\tau_i = \tau_{i+1}$ *si* $i \notin \Theta$.

(iv) *L'image de* k_n *sur* $\boldsymbol{P}_\Theta/\boldsymbol{G}$ *converge en loi vers la probabilité* $\tilde{\lambda} . g$.

(2.18) THÉORÈME ([6] Lemme (2.23)).

(i) *L'image de* N_n *dans* $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ *converge* **P**-p.s. *vers la variable aléatoire* Z; *autrement dit si on écrit* $N_n = N_n^1 N_n^2$ *avec* $N_n^1 \in \boldsymbol{N}_{\hat{\Theta}}$ *et* $N_n^2 \in \boldsymbol{N}_\Theta$, *alors la suite de variables aléatoires* $\{N_n^1\}_{n\geqq 1}$ *converge* **P**-p.s. *vers une variable aléatoire* U *à valeurs dans* $\boldsymbol{N}_{\hat{\Theta}}$.

(ii) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$0 < \liminf_n \,(a_i(n)/b_i(n)) \leqq \limsup_n \,(a_i(n)/b_i(n)) < +\infty \qquad \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

(iii) *Les valeurs d'adhérence de la suite d'éléments de* $\boldsymbol{K}$, $\{K_n k_n^{-1}; n \geqq 1\}$, *appartiennent à* $\boldsymbol{K}_\Theta$.

D. *Remarque*

(2.19) Grâce au lemme (2.9), nous pouvons affaiblir l'hypothèse de totale irréductibilité intervenant dans les théorèmes précédents.

En effet tous ces résultats sont basés sur l'existence d'une mesure de probabilité μ-invariante λ sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ telle que, pour tout $g \in \boldsymbol{G}$, la probabilité $g . \lambda$ soit portée par l'ensemble de continuité de τ_Θ.

On peut énoncer:

(2.20) *Supposons que μ possède une mesure de probabilité μ-invariant* irréductible sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$. *Alors les conclusions des théorèmes* (2.17) *et* (2.18) *s'appliquent excepté l'assertion* (i) *du théorème* (2.17) *où l'on doit remplacer "unique probabilité μ-invariante" par "unique probabilité μ-invariante* irréductible".

[Il pourrait en effet y avoir des probabilités μ-invariantes non irréductibles.]

(2.21) Dans le cas où T_μ est totalement irréductible, toutes les probabilités μ-invariantes sur $\boldsymbol{B}$, et par suite sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$, sont irréductibles. Mais cette hypothèse peut être affaiblie de la façon suivante.

(2.22) Définition. Nous disons que T_μ agit de façon totalement irréductible sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ s'il n'existe pas des éléments $x, g_1, \ldots, g_r$ de $\boldsymbol{G}$ et un entier $k \in d - \Theta$, tels que

$$\prod_{1 \leqq k \leqq r} \Delta_k(g_i G_\mu x) = \{0\}.$$

Autrement dit la notion de totale irréductibilité correspond à: "T_μ agit de façon totalement irréductible sur $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{MA}\tilde{\boldsymbol{N}}$"; ou encore à $\Theta = \Sigma$. Cette hypothèse est vérifiée, lorsque pour tout $k \in d - \Theta$, T_μ ne laisse pas invariant une réunion finie de sous-espaces propres de $\wedge_k \mathbf{R}^d$.

(2.23) Lorsque H_μ agit de façon totalement irréductible sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$, toute probabilité μ-invariante sur $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ est irréductible; toute probabilité μ-invariante ν sur $\boldsymbol{B}$ n'est pas nécessairement irréductible mais, pour tout $g \in \boldsymbol{G}$, la mesure $g \,.\, \nu$ est portée par $\zeta(\boldsymbol{NM}'_\Theta) = \zeta(\boldsymbol{N}_\Theta \boldsymbol{K}_\Theta)$, ensemble de continuité de τ_Θ.

III. Résultats principaux

(3.1) μ est une mesure de probabilité sur les boréliens de $\boldsymbol{G}$. On appelle T_μ le sous-semi-groupe fermé de $\boldsymbol{G}$ engendré par le support de μ. Nous appelons Θ l'ensemble des entiers $i \in \Sigma$ tels que $\inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in T_\mu\} = 0$. Nous supposons que T_μ est totalement irréductible (déf. (1.4)). Nous notons H_μ l'adhérence algébrique du semi-groupe T_μ. Nous désignons par π la loi de la variable aléatoire U du théorème (2.18); π est portée par N_Θ.

Nous avons:

(3.2) Théorème. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, en changeant au besoin μ par $x^{-1}\mu x$ avec $x \in \boldsymbol{G}$, on se ramène à la situation suivante*:

$$(\bullet) \qquad (H_\mu \,.\, \operatorname{supp} \pi) \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \subset \boldsymbol{N}_\Theta \boldsymbol{K}'_\Theta \boldsymbol{A}_\Theta \tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta$$

où K'_Θ est un sous-groupe compact de K_Θ.

[On désigne par K'_Θ le plus petit sous-groupe compact de K_Θ ayant cette propriété.]

(3.3) COROLLAIRE. *Plaçons-nous dans la situation du théorème* (3.2). *Considérons l'ouvert $N_\Theta \bar{P}_\Theta$ de G et identifions l'ouvert dense $\zeta(N_\Theta K_\Theta)$ de B à $N_\Theta \times K_\Theta/M$ en écrivant $N_\Theta \tilde{P}_\Theta = N_\Theta K_\Theta A\tilde{N}$. Toute mesure de probabilité μ-invariante ν sur B s'écrit alors $\pi \otimes m$, où π est la loi de la v.a. U et m est une mesure de probabilité sur K_Θ/M qui est K'_Θ-invariante. Lorsque $K'_\Theta = K_\Theta$, il s'ensuit qu'il existe une unique mesure μ-invariante ν sur B.*

(3.4) COROLLAIRE. *L'ensemble Θ est aussi égal à l'ensemble des entiers $i \in \Sigma$ tels que*: $\inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in H_\mu\} = 0$.

(3.5) THÉORÈME. *Avec les hypothèses et notations précédentes, le sous-groupe algébrique H_μ de G est réductif, l'un de ses conjugués, $H'_\mu = c^{-1}Hc$, est auto-adjoint et admet les décompositions*

$$H'_\mu = N'A'K' \quad (\textit{Iwasawa}); \qquad H'_\mu = K'A'K' \quad (\textit{polaire});$$

où N' est sous-groupe de N_Θ, A' un sous-groupe de A_Θ et K' un sous-groupe de K. On en déduit donc que

$$\forall i \in \Theta, \quad \forall g \in H'_\mu, \quad a_i(g) = a_{i+1}(g) \quad \textit{et} \quad b_i(g) = b_{i+1}(g).$$

(3.6) DÉFINITION ([4]). Nous disons qu'un semi-groupe T opère de manière proximale sur un espace compact X si pour deux points arbitraire x, y de X, il existe une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de T telle que $\lim_{n \to +\infty} g_n \cdot x = \lim_{n \to +\infty} g_n \cdot y$.

(3.7) COROLLAIRE. *Le groupe H_μ opère de manière proximale sur B_Θ. Il possède une unique orbite fermée L_μ et cette orbite s'identifie à la frontière maximale de H_μ* ([4], [1], [10]). *Appelons $\eta^{-1}(L_\mu)$ l'image réciproque de l'orbite L_μ par l'application naturelle η de B sur B_Θ. L'action de H_μ sur $\eta^{-1}(L_\mu)$ est isométrique relativement à L_μ: il existe une distance riemannienne naturelle δ sur B telle que pour deux éléments x et y de $\eta^{-1}(L_\mu)$ ayant même projection sur L_μ. nous avons $\forall g \in H_\mu$, $\delta(g \cdot x, g \cdot y) = \delta(x, y)$.*

(3.8) LEMME. *Soit T un semi-groupe totalement irréductible de matrices de G. Alors T opère de façon proximale sur B_Θ si et seulement si T possède une suite Θ-contractante.*

(3.9) LEMME. *Soit H un sous-groupe connexe de $\boldsymbol{G}$ qui contient une suite contractante de matrices diagonales. Alors H n'est pas totalement irréductible si et seulement s'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, [d/2]\}$ et deux matrices m, m' de $\boldsymbol{M}'$ tels que: $\forall g \in H$, $\Delta_k(m\, g\, m') = 0$. (Si $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $[\alpha]$ sa partie entière.)*

Plus généralement, si H contient une suite Θ-contractante de matrices diagonales. Alors H n'est pas totalement irréductible si et seulement s'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, [d/2]\}$ et deux matrices x, y de $\boldsymbol{M}'/\boldsymbol{K}_\Theta$ tels que: $\forall g \in H$, $\Delta_k(x\, g\, y) = 0$. En particulier si $\boldsymbol{K}_\Theta \subset H$, on retrouve la condition précédente.

EXEMPLES.

• $H = \boldsymbol{O}(3, 1) = \{g \in \boldsymbol{G},\ {}^t g J g = J\}$ où $J = \operatorname{diag}(I_3, -1)$.

Considérons la matrice

$$k = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Nous avons $H' = k\boldsymbol{O}(3, 1)k^{-1} = N'A'K'$ avec

$$N' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b & -(a^2+b^2)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \quad ;$$

$$A' = \{\operatorname{diag}(x, 1, 1, 1/x) : x > 0\}$$

et

$$K' = k\{\operatorname{diag}(U, \varepsilon) : U \in \boldsymbol{O}(3),\ \varepsilon = \pm 1\}k^{-1}.$$

Soit $\Theta = \{1, 3\}$; A' possède des suites Θ-contractantes et le centralisateur de A' dans K' est égal à $\boldsymbol{K}_\Theta$. On vérifie facilement qu'aucun mineur d'ordre 1 ou 2 n'est identiquement nul sur l'ouvert $N'\boldsymbol{K}_\Theta A'\,{}^t N'$; le groupe H' est donc totalement irréductible (lemme (3.9)). Pour toute mesure de probabilité μ portée par un conjugué de $\boldsymbol{O}(3, 1)$ dont le semi-groupe associé T_μ est algébriquement dense dans ce conjugué, il existe sur l'espace des drapeaux $\boldsymbol{B}$ une unique probabilité μ-invariante (corollaire (3.3)).

D'un point de vue géométrique, le groupe $\boldsymbol{O}(3, 1)$ laisse invariante dans $\boldsymbol{P}^3$ la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ et opère sur cette sphère de manière conforme. L'espace $\boldsymbol{B}$ des drapeaux de $\mathbf{R}^4$ s'identifie à l'ensemble des éléments de contact (x, d, p) de $\boldsymbol{P}^3$. Un tel élément est formé d'un point x, d'une droite d passant par x et d'un plan p contenant la droite d. Ici le groupe $\boldsymbol{O}(3, 1)$ opère de manière proximale sur l'espace $\boldsymbol{B}_\Theta$ des drapeaux incomplets du type (x, p). Une orbite fermée $\hat{S}$ de $\boldsymbol{O}(3, 1)$ sur $\boldsymbol{B}_\Theta$ est formée des couples (x, p) avec $x \in S$, p tangent à S; c'est donc la seule orbite fermée de $\boldsymbol{O}(3, 1)$ sur $\boldsymbol{B}_\Theta$. L'ensemble des éléments de contact tangents à S constitue aussi l'unique orbite fermée $\bar{S}$ dans $\boldsymbol{B}$; cette orbite est fibrée au dessus de $\hat{S}$, la fibre typique étant constituée des droites tangentes en un point à S; l'angle de deux telles droites est conservé par l'action de $\boldsymbol{O}(3, 1)$. Pour une mesure de probabilité μ dont le semi-groupe associé est algébriquement dense dans $\boldsymbol{O}(3, 1)$, l'unique probabilité μ-invariante sur $\boldsymbol{B}$ a un support contenu dans $\bar{S}$. Il y a trois exposants de Liapunoff λ_1, λ_2, λ_3 avec $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$; l'exposant nul λ_2 est de multiplicité 2, ceci correspond au fait que $\boldsymbol{O}(3, 1)$ opère de manière conforme sur S.

- $H = \boldsymbol{O}(3, 2)$

Considérons la matrice

$$k = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Nous avons $H' = k^{-1}\boldsymbol{O}(3, 2)$, $k = N'A'K'$ avec

$$N' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & -ac - b^2/2 \\ 0 & 1 & d & -d^2/2 & ad^2/2 - c - db \\ 0 & 0 & 1 & -d & ad - b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\},$$

$$A' = \{\operatorname{diag}(x, y, 1, 1/y, 1/x) : x > 0, y > 0\}$$

et

$$K' = k\{\operatorname{diag}(U, V) : U \in \boldsymbol{O}(3), V \in \boldsymbol{O}(2)\}k^{-1}.$$

Le groupe A' possède des suites contractantes. On vérifie qu'aucun mineur d'ordre 1 ou 2 n'est identiquement nul sur $N'A'\,{}^tN'$; le groupe H' est totalement irréductible.

Nous avons donc ici un exemple de groupe non algébriquement dense dans $\boldsymbol{G}$ "dont tous les exposants de Liapunoff sont distincts".

$$\bullet\ H=\left\{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1p}\\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2p}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ M_{p1} & M_{p2} & \cdots & M_{pp}\end{bmatrix} : \forall i,j\in\{1,\ldots,p\}, M_{ij}=\begin{bmatrix}\alpha_{ij} & \beta_{ij}\\ -\beta_{ij} & \alpha_{ij}\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\text{avec } \det B\neq 0 \text{ où } B \text{ est la matrice complexe définie par } x_{ij}(B)=\alpha_{ij}+i\beta_{ij}\right\}.$$

Nous avons $H=NAK$ avec

$$N=\left\{\begin{bmatrix} I_2 & M_{12} & \cdots & M_{1p}\\ 0 & I_2 & \cdots & M_{2p}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & I_2\end{bmatrix} : \forall 1\leqq i<j\leqq p, M_{ij}\in\mathbf{R}_+^*\mathbf{SO}(2)\right\},$$

$A=\{\operatorname{diag}(a_1I_2,a_2I_2,\ldots,a_pI_2): a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbf{R}_+^*\}$ et $K=H\cap\boldsymbol{O}(2p)$.

Soit $\Theta=\{2r: 1\leqq r\leqq p-1\}$; le centralisateur de A dans K est égal à $\boldsymbol{K}_\Theta$. Le groupe H est totalement irréductible. Pour toute mesure de probabilité μ portée par un conjugué de H telle que T_μ soit algébriquement dense dans ce conjugué, il existe sur $\boldsymbol{B}$ une unique mesure de probabilité μ-invariante.

IV. Démonstration des résultats

A. *Démonstration des résultats énoncés dans la partie III*

(4.1) Nous reprenons les notations et hypothèses de (2.16).

Identifions $\boldsymbol{K}$ à $NA\backslash\boldsymbol{G}$. Pour tout $k\in\boldsymbol{K}$, le processus $\{k\,.\,X_n; n\geqq 0\}$ est une chaîne de Markov sur $\boldsymbol{K}$, partant de k, de probabilité de transition P définie par

$$Pf(x)=\int_G f(x\,.\,g)\mu(dg)\qquad(x\in\boldsymbol{K}).$$

Cette chaîne est appelée "marche aléatoire de loi μ" sur $\boldsymbol{K}$.

Nous disons qu'un élément k de $\boldsymbol{K}$ est *récurrent* (pour cette chaîne) si pour tout voisinage V de k, la chaîne $\{k\,.\,X_n; n\geqq 0\}$ visite V une infinité de fois $\mathbf{P}$-p.s.

(4.2) LEMME. *La marche aléatoire de loi μ sur $\boldsymbol{K}$ possède des éléments récurrents. Si x_0 est l'un d'eux, alors la marche aléatoire de loi $x_0\,\mu\, x_0^{-1}$ sur $\boldsymbol{K}$ possède l'élément neutre comme élément récurrent.*

(4.3) LEMME ([6] lemme (2.13)). *Soit ν une mesure de probabilité μ-invariante sur la frontière maximale $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{G}$. Notons σ la mesure de probabilité $\Sigma_{n\geqq 1}(1/2^n)\,\mu^{*n}$ sur $\boldsymbol{G}$. Alors pour $\mathbf{P}\otimes\sigma$-presque tout $(\omega,\xi)\in\Omega\times\boldsymbol{G}$, les suites de mesure de probabilité $(X_n(\omega)\,.\,\nu)_{n\geqq 0}$ et $(X_n(\omega)\,\xi\,.\,\nu)_{n\geqq 0}$ convergent étroitement vers la même limite $\rho(\omega)$.*

(4.4) PREUVE DU THÉORÈME (3.2). Nous reprenons le raisonnement fait pour démontrer le théorème (2.19) de [6] (voir [6] section (2.14)).

Quitte à changer la mesure μ en une de ses conjuguées $x_0\,\mu\, x_0^{-1}$, nous supposons que la marche aléatoire de loi μ sur $\boldsymbol{K}$ possède l'élément neutre comme élément récurrent (lemme (4.2)).

D'après le lemme (4.3) ci-dessus, nous pouvons trouver une suite $(\xi_i)_{i\geqq 1}$ dense dans T_μ et un sous-ensemble Ω_0 de Ω de $\mathbf{P}$-mesure 1 tels que

$$(*)\qquad \forall\,\omega\in\Omega_0,\quad \forall\, i\geqq 1,\quad \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)\xi_i\,.\,\nu=\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)\,.\,\nu=\rho(\omega).$$

Quitte à changer Ω_0 par un sous-ensemble de $\mathbf{P}$-mesure 1, nous pouvons supposer que: pour tout $\omega\in\Omega_0$, il existe une valeur d'adhérence quasi-projective $x(\omega)d(\omega)\tau(\omega)k(\omega)$ de la suite $(X_n(\omega))_{n\geqq 1}$ (voir (2.10)), telle que:

(i) $\tau(\omega)=\tau_\Theta$ (théorème (2.17)),

(ii) $k(\omega)\in\boldsymbol{K}_\Theta$ (assertion (iii) du théorème (2.18) et l'élément neutre de $\boldsymbol{G}$ est un élément récurrent de la marche de loi μ),

(iii) $x(\omega)\in\boldsymbol{N}_\Theta\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ (théorème (2.17)).

Nous écrivons $x(\omega)=U(\omega)\,p(\omega)$ avec $p(\omega)\in\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ et $U(\omega)\in\boldsymbol{N}_\Theta$; la v.a. U n'est autre que la v.a. de l'assertion (i) du théorème (2.18).

Il existe alors une suite d'entiers $(\psi_\omega(n))_{n\geqq 1}$ telle que pour tout $u\in\zeta(k(\omega)^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}'_\Theta)$,

$$\lim_{n\to+\infty} X_{\psi_\omega(n)}(\omega)\,.\,u=x(\omega)d(\omega)\tau_\Theta k(\omega)\,.\,u;$$

et cette limite s'écrit aussi $x(\omega)d(\omega)k(\omega)\tau_\Theta\,.\,u$ car $\boldsymbol{K}_\Theta$ et $\boldsymbol{A}_\Theta$ commutent.

La mesure ν étant irréductible et τ_Θ continue sur $\zeta(\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}'_\Theta)$ (lemme (2.9)), des relations $(*)$ il résulte d'abord que

$$\forall\, i\geqq 1,\qquad \tau_\Theta\,\xi_i\,.\,\nu=\tau_\Theta\,.\,\nu;$$

et ensuite:

$$(**)\qquad \tau_\Theta \xi \,.\, \nu = \tau_\Theta \,.\, \nu, \qquad \forall \xi \in T_\mu \cup \{e\}.$$

Prenons une suite $(\xi_n)_{n \geqq 1}$ d'éléments de T_μ convergeant vers l'application quasi-projective $x(\omega)d(\omega)k(\omega)\tau_\Theta$ (par exemple $\xi_n = X_{\psi_\omega(n)}(\omega)$) et un élément ξ appartenant à

$$(\{e\} \cup T_\mu) \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta (x(\omega)d(\omega)k(\omega))^{-1} = (\{e\} \cup T_\mu) \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta\, U(\omega)^{-1}.$$

La suite de mesures de probabilité $(\xi\xi_n \,.\, \nu)_{n \geqq 1}$ converge étroitement vers une translatée de $\tau_\Theta \,.\, \nu$ par un élement de $\boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$; mesure qui est portée par l'ouvert partout dense $\zeta(\boldsymbol{N}_\Theta \boldsymbol{K}_\Theta)$ de $\boldsymbol{B}$. Comme τ_Θ est continue sur cet ensemble, il s'ensuit que:

$$\forall \xi \in (T_\mu \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta\, U(\omega)^{-1}) \cup \{e\}, \qquad \tau_\Theta \xi x(\omega)d(\omega)k(\omega)\tau_\Theta \,.\, \nu = \tau_\Theta \,.\, \nu;$$

et par suite, voir (2.14), $\rho_\Theta(\xi x(\omega)d(\omega)k(\omega))\tau_\Theta \,.\, \nu = \tau_\Theta \,.\, \nu$.

Pour $\xi = e$, cette égalité nous donne: $p(\omega)d(\omega)k(\omega)\tau_\Theta \,.\, \nu = \tau_\Theta \,.\, \nu$; d'où

$$\forall \xi \in T_\mu \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta\, U(\omega)^{-1}, \qquad \rho_\Theta(\xi U(\omega))\tau_\Theta \,.\, \nu = \tau_\Theta \,.\, \nu.$$

Du lemme (2.13), via le lemme (2.15), il résulte alors que

$$T_\mu U(\omega) \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \subset \boldsymbol{N}_\Theta \boldsymbol{C}_\Theta \boldsymbol{A}_\Theta \tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta,$$

où $\boldsymbol{C}_\Theta$ est un sous-groupe compact de $\boldsymbol{H}_\Theta$ (indépendant de $\omega \in \Omega_0$). Il existe alors un élément y de $\boldsymbol{H}_\Theta$ tel que $\boldsymbol{K}'_\Theta = y\boldsymbol{C}_\Theta y^{-1}$ soit un sous-groupe de $\boldsymbol{K}_\Theta$. Ce qui donne alors,

$$y^{-1} T_\mu U(\omega) y \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \subset \boldsymbol{N}_\Theta \boldsymbol{K}'_\Theta \boldsymbol{A}_\Theta \tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta.$$

[On notera que $\boldsymbol{H}_\Theta$ est contenu dans $\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ et normalise $\boldsymbol{N}_\Theta$ et $\tilde{\boldsymbol{N}}_\Theta$.]

Posons $X = \{U(\omega) : \omega \in \Omega_0\}$. Pour tout $x \in X$, nous avons alors avec les notations de (2.3) et (2.7):

$$\forall g \in x^{-1} T_\mu x \cap \boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta, \quad u(\rho_\Theta(g)) = I \quad \text{et} \quad a(\rho_\Theta(g)) = I.$$

A ces relations il faut ajouter celles qui expriment que $k(\rho_\Theta(g)) \in \boldsymbol{K}'_\Theta$, sous-groupe compact de $\boldsymbol{K}_\Theta$. Ces équations se ramènent à l'annulation d'une famille finie de polynômes; soit $P_j(g) = 0$, pour $j \in \{1, \ldots, q\}$. Comme tout élément n'appartenant pas à $\boldsymbol{N}_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ annule nécessairement un des mineurs Δ_p, $p \in d - \boldsymbol{\Theta}$, il s'ensuit, en posant

$$Q_j = P_j\left(\prod_{p\in d-\Theta} \Delta_p\right),$$

que:

$$\forall x\in X,\quad \forall g\in x^{-1}T_\mu x,\quad \forall j\in\{1,\dots,q\},\quad Q_j(g)=0.$$

D'où, pour tout $x\in\operatorname{supp}\pi$ (et même pour tout x appartenant à l'adhérence algébrique de $\operatorname{supp}\pi$ dans $\boldsymbol{N}$),

$$\forall g\in x^{-1}H_\mu x,\quad \forall j\in\{1,\dots,q\},\quad Q_j(g)=0;$$

et par suite

$$\forall x\in\operatorname{supp}\pi,\quad \forall g\in x^{-1}H_\mu x\cap N_\Theta\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta,\quad \forall j\in\{1,\dots,q\},\quad P_j(g)=0.$$

Le théorème (3.2) est ainsi démontré.

(4.5) Preuve du corollaire (3.3). De (4.4) il résulte que:

$$\rho(\omega)=\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)\,.\,\nu = U(\omega)\tau_\Theta\,.\,\nu,$$

d'où $\nu=\int_\Omega \rho(\omega)d\mathbf{P}(\omega)=\int_\Omega U(\omega)\tau_\Theta\,.\,\nu\, d\mathbf{P}(\omega)=\pi*(\tau_\Theta\,.\,\nu)$.

(4.6) Preuve du corollaire (3.4). Posons

$$\Theta'=\{i\in\Sigma:\inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g):g\in H_\mu\}=0\};$$

nous avons $\Theta\subset\Theta'$. Nous allons montrer que $\Theta=\Theta'$.

Considérons une probabilité μ' sur H_μ telle que $T_{\mu'}=H_\mu$. Il existe une unique probabilité μ'-invariante λ' sur $\boldsymbol{B}_\Theta$ (et même sur $\boldsymbol{B}_{\Theta'}$), et cette mesure est irréductible. Appelons π' la probabilité sur $\boldsymbol{N}_\Theta$ qui admet λ' pour image dans $\boldsymbol{B}_\Theta$.

Nous allons étudier les supports des probabilités λ et λ'. On voit facilement que:

$$\forall x\in\operatorname{supp}\lambda,\quad \overline{T_\mu\,.\,x}=\operatorname{supp}\lambda \quad\text{et}\quad \forall y\in\operatorname{supp}\lambda',\quad \overline{H_\mu\,.\,y}=\operatorname{supp}\lambda'.$$

Soit y un élément de $\operatorname{supp}\lambda'$. Nous savons que les orbites d'un groupe algébrique sur une variété algébrique sont toujours ouvertes dans leur adhérence ([11]); l'orbite $H_\mu\,.\,y$ est donc ouverte dans son adhérence $\overline{H_\mu\,.\,y}$. Mais alors l'ensemble $\overline{H_\mu\,.\,y}-H_\mu\,.\,y$ est fermé et H_μ-invariant; il porte donc une mesure de probabilité μ'-invariante. D'après l'unicité d'une telle mesure, il résulte alors que cet ensemble est vide et $H_\mu\,.\,y$ est fermé; d'où

$$\forall y\in\operatorname{supp}\lambda',\qquad H_\mu\,.\,y=\operatorname{supp}\lambda'.$$

D'autre part de l'unicité de la probabilité μ-invariante, il s'ensuit que $\operatorname{supp} \lambda \subset \operatorname{supp} \lambda'$, car ce sont deux fermés T_μ-invariants.

On en déduit donc, que l'on a: $\operatorname{supp} \pi \subset \operatorname{supp} \pi'$ et pour tout $x \in \operatorname{supp} \pi'$, l'adhérence de $v_\Theta(H_\mu x \cap N_\Theta \tilde{P}_\Theta)$ dans N_Θ est égale à $\operatorname{supp} \pi'$. Ceci dit considérons un élément x de $\operatorname{supp} \pi$. De l'inclusion

$$H_\mu x \cap N_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \subset N_\Theta \boldsymbol{K}'_\Theta A_\Theta \tilde{\mathrm{N}}_\Theta$$

du Théorème (3.2), on déduit alors que

$$\mathbf{H}_\mu \operatorname{supp} \pi' \cap N_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \subset N_\Theta \boldsymbol{K}'_\Theta A_\Theta \tilde{N}_\Theta.$$

Comme dans le corollaire (3.3), identifions l'espace des drapeaux $\boldsymbol{B}$ au produit cartésien $N_\Theta \times \boldsymbol{K}_\Theta / M$, la probabilité $\pi' \otimes \boldsymbol{m}$, où $\boldsymbol{m}$ désigne la probabilité $\boldsymbol{K}_\Theta$-invariante sur $\boldsymbol{K}_\Theta/\boldsymbol{M}$, est alors μ'-invariante. Ce qui prouve que: $\Theta' = \Theta$. En effet dans le cas contraire, d'après le corollaire (3.3), cette mesure ne pourrait pas être μ'-invariante.

(4.7) Démonstration du théorème (3.5). Les raisonnements qui vont suivrent ne font plus intervenir μ ou T_μ, mais seulement la propriété de totale irréductibilité du groupe algébrique H_μ et la définition de Θ (qui est la même pour H_μ et T_μ).

Le groupe H_μ est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Appelons R le *radical* de H_μ; c'est-à-dire le plus grand sous-groupe distingué résoluble connexe de H_μ. Nous savons (théorème de Levi–Malcev) que H_μ est le produit semi-direct de son *radical* R et d'un sous-groupe semi-simple S. D'après le théorème de Lie, les matrices de R sont triangulables simultanément dans $\mathbf{C}$. Les éléments diagonaux nous fournissent alors des homomorphismes de R dans $(\mathbf{C} - \{0\}, \times)$ appelés *poids* de R. Pour tout poids φ de R, appelons V_φ le sous-espace de $\mathbf{C}^d$ tel que: $\forall r \in R$, $\forall u \in V_\varphi$, $ru = \varphi(r)u$. Il existe un poids φ pour lequel V_φ n'est pas réduit au vecteur nul. En outre puisque R est distingué dans H_μ, le groupe H_μ permute les sous-espaces V_φ. Il est facile de voir que puisque H_μ est totalement irréductible, H_μ ne laisse pas invariante une réunion finie de sous-espaces propres de $\mathbf{R}^d$. On en déduit alors que:

- ou bien $\mathbf{R}^d = V_\varphi$, pour un poids φ réel, et dans ce cas R est composé de matrices scalaires;
- ou bien $\mathbf{C}^d = V_\varphi \oplus V_{\bar{\varphi}}$, pour un poids φ complexe ($\bar{\varphi}$ désignant le poids conjugué de φ).

Dans le premier cas le groupe algèbrique H_μ est, modulo les homothéties, semi-simple. D'après ([2], Prop. 9.2) nous savons alors que H_μ possède un conjugué auto-adjoint H'_μ.

Dans le second cas, la dimension d est paire et le radical R est isomorphe à $(\mathbf{C}-\{0\}, \times)$ ou à $\mathbf{SO}(2)$; le groupe semi-simple S possède un sous-groupe d'indice deux S_0 qui laisse les espaces V_φ et $V_{\bar\varphi}$ invariants et qui centralise donc R. D'autre part, compte tenu de la forme particulière du radical R de H_μ, il est facile de montrer que H_μ possède un conjugué auto-adjoint H'_μ, avec la même démonstration que celle donnée par Borel.

Dans les deux cas le radical unipotent de H_μ est réduit à la matrice unité; H_μ est donc un groupe réductif. En outre nous avons:

$$\forall i \notin \Theta, \quad \forall g \in H'_\mu, \qquad b_i(g) = b_{i+1}(g).$$

[En effet aux groupes H_μ et H'_μ correspond le même ensemble Θ et pour tout $g \in H'_\mu$, les matrices $(g\,{}^t g)^n$, $n \geqq 1$, appartiennent à H'_μ et vérifient

$$\forall i \in \Sigma, \qquad b_i((g\,{}^t g)^n) = (b_i(g))^{2n}.]$$

On montre alors ([2], Prop. 11.25) que H'_μ admet des décompositions d'Iwasawa et polaire $H'_\mu = N'A'K'$, $H'_\mu = K' \operatorname{Exp} \bar{W}' K'$ "bien placées". C'est-à-dire que: N', A' et K' sont respectivement des sous-groupes de $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{K}$; et

$$\operatorname{Exp} \bar{W}' = \{\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_d) \in A' : 0 < a_1 \leqq \cdots \leqq a_d\}.$$

Dans notre situation, il est clair que l'on doit avoir: $A' \subset \boldsymbol{A}_\Theta$ et $N' \subset \boldsymbol{N}_\Theta$.

(4.8) Remarque. Les résultats obtenus dans [6] (resp. [7]) dans le cadre d'un groupe semi-simple connexe (resp. du groupe linéaire $\boldsymbol{G}$) s'étendent, sans aucune difficulté, au cas d'un groupe de Lie réductif H ayant un nombre fini de composantes connexes dont le radical est du type particulier rencontré ici. Le passage du cas connexe à un nombre fini de composantes connexes s'obtient facilement à l'aide des considérations suivantes. Si $H_0 = NAK$ désigne une décomposition d'Iwasawa de la composante connexe H_0 de H, alors on obtient celle de H en grossissant le sous-groupe K par des éléments qui normalisent les sous-groupes N et A (voir [10]). Les conclusions du théorème (2.6), et de son corollaire (2.8), de [6] s'appliquent au couple $(H'_\mu, c^{-1}\mu c)$ (ainsi qu'au couple (H_μ, μ)).

(4.9) Appelons Γ (respectivement Γ') le centralisateur (respectivement le normalisateur) de A' dans K' et posons $\tilde{N}' = {}^t N'$. Le groupe Γ est contenu dans le centralisateur K_Θ de A' dans $\boldsymbol{K}$ et Γ' normalise les groupes N' et $\tilde{N}'$. Le groupe H'_μ possède la décomposition de Bruhat

$$H'_\mu = \bigcup_{m \in \Gamma'/\Gamma} N'm\Gamma A'\tilde{N}' \quad \text{et} \quad H'_\mu \cap N_\Theta \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta = N'\Gamma A'\tilde{N}'.$$

La frontière maximale de H'_μ est $B' = H'_\mu/\Gamma' A'\tilde{N}'$. L'unique probabilité $c^{-1}\mu c$-invariante sur $\boldsymbol{B}_\Theta$, $c^{-1} . \lambda$, est portée par $N' . \partial_\Theta$. Cette frontière s'identifie à l'orbite fermée $H'_\mu . \partial_\Theta$ de H'_μ dans l'espace des drapeaux incomplets $\boldsymbol{B}_\Theta$.

(4.10) Démonstration du corollaire (3.7). Pour démontrer ce corollaire, nous pouvons évidemment remplacer H_μ par son conjugué H'_μ. Nous avons déjà vu que $H'_\mu . \partial_\Theta$ (resp. $H_\mu . x$ avec $x \in \operatorname{supp} \lambda$) était une orbite fermée de H'_μ (resp. H_μ) sur $\boldsymbol{B}_\Theta$; cette orbite est en fait l'adhérence algébrique du support de la mesure μ-invariante λ. C'est la seule à cause de l'unicité de la mesure de probabilité μ-invariante.

Considérons une distance riemannienne δ sur $\boldsymbol{B}$ invariante par le groupe orthogonal $\boldsymbol{K}$. Soient x et y deux éléments de H'_μ tels que $x . \partial_\Theta = y . \partial_\Theta = \partial_\Theta$. Les matrices x et y appartiennent alors au sous-groupe $H'_\mu \cap \tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta = \Gamma A'\tilde{N}'$ de H'_μ; si bien qu'il existe deux éléments γ et γ' de Γ tels que $x . \partial = \gamma . \partial$ et $y . \partial = \gamma' . \partial$.

Si $g \in H'_\mu$, écrivons $g = k a \tilde{v}$ avec $k \in K'$, $a \in A'$, $\tilde{v} \in \tilde{N}'$. Nous avons alors $gx . \partial = k\gamma . \partial$ et $gy . \partial = k\gamma' . \partial$ et par suite $\delta(gx . \partial, gy . \partial) = \delta(x . \partial, y . \partial)$. Considérons à présent deux éléments x et y de H'_μ tels que $x . \partial_\Theta = y . \partial_\Theta$. Le sous-groupe K' étant transitif sur $H'_\mu . \partial_\Theta$, il existe un élément $k \in K'$ tel que $kx . \partial_\Theta = ky . \partial_\Theta = \partial_\Theta$. D'après ce qui précède nous avons alors,

$$\forall g \in H'_\mu, \qquad \delta(gkx . gky . \partial) = \delta(kx . \partial, ky . \partial) = \delta(x . \partial, y . \partial).$$

(4.11) Démonstration du lemme (3.8).

(a) Supposons l'existence d'une suite $\{g_n\}_{n \geqq 1}$ Θ-contractante d'éléments de T et montrons la proximalité de T sur $\boldsymbol{B}_\Theta$.

Quitte à prendre une sous-suite nous pouvons supposer que la suite $\{g_n\}_{n \geqq 1}$ converge vers une application quasi-projective $x\tau_\Theta k$. Soient u, v deux éléments de $\boldsymbol{B}_\Theta$. Il existe $t \in T$ tel que ktu et ktv appartiennent à la sous-variété ouverte $N_\Theta . \partial_\Theta$. En effet dans le cas contraire on aurait

$$kT \subset (NMANg_1)^c \cup (NMANg_2)^c,$$

pour deux éléments g_1 et g_2 de $\boldsymbol{G}$; ce qui contredirait la totale irréductibilité de T. Les suites $\{g_n t . u\}_{n \geqq 1}$ et $\{g_n t . v\}_{n \geqq 1}$ convergent alors vers $x . \partial_\Theta$; d'où la proximalité de T.

(b) Réciproquement supposons que T ne possède pas de suite Θ-contractante; c'est-à-dire que $\Theta' = \{i \in \Sigma : \inf\{b_i(g)/b_{i+1}(g) : g \in T\} = 0\}$ ne contient pas Θ.

Appelons H l'adhérence algébrique de T. D'après le corollaire (3.7), H admet une seule orbite fermée L sur $\boldsymbol{B}_{\Theta'}$ et il existe une distance δ sur $\boldsymbol{B}$ telle que pour deux éléments u et v de $\boldsymbol{B}$ se projettant sur le même élément de L on ait $\delta(g\,.\,u, g\,.\,v) = \delta(u, v)$, $\forall g \in H$. Puisque Θ' ne contient pas Θ, le sous-groupe $\boldsymbol{N}_\Theta \cap \boldsymbol{N}_{\tilde{\Theta}'}$ n'est pas réduit à la matrice identité. Si x et y sont deux éléments distincts de ce sous-groupe et si z est un élément de $\boldsymbol{N}_{\tilde{\Theta}'}$ se projettant dans L, nous avons alors

$$\forall g \in H, \qquad \delta(gxz\,.\,\partial, gyz\,.\,\partial) = \delta(xz\,.\,\partial, yz\,.\,\partial).$$

Ce qui entraîne que T (ou H) n'est pas proximal sur $\boldsymbol{B}_\Theta$.

(4.12) Démonstration du lemme (3.9). Si le sous-groupe connexe H de $\boldsymbol{G}$ n'est pas totalement irréductible il existe un entier $k \in \{1, \ldots, d\}$ et deux éléments x et y de $\boldsymbol{G}$ tels que

$$(*) \qquad \forall g \in H, \qquad \Delta_k(xgy) = 0.$$

Ecrivons: $x = uamv$ et $y = u'a'm'v'$ avec $u, u' \in \boldsymbol{N}$, $a, a' \in \boldsymbol{A}$, $m, m' \in \boldsymbol{M}'$, $v, v' \in \tilde{\boldsymbol{N}}$. Soit $\{d_n\}_{n \geq 1}$ une suite contractante de matrices diagonales de H. Nous avons (lemme (2.2)):

$$\forall g \in H, \qquad \Delta_k(md_n^{-1}vd_ngd_nu'd_n^{-1}m') = 0.$$

Comme les suites de matrices $\{d_n^{-1}vd_n\}_{n \geq 1}$ et $\{d_nu'd_n^{-1}\}_{n \geq 1}$ convergent vers la matrice identité, il s'ensuit que:

$$\forall g \in H, \qquad \Delta_k(mgm') = 0;$$

ou encore

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_{d-k}) \wedge mHm'(f_{d-k+1} \wedge \cdots \wedge f_d) = 0.$$

Appelons γ la matrice de $\boldsymbol{M}'$ ayant des "1" sur la diagonale secondaire et des zéros ailleurs. L'égalité précédente équivaut à

$$\gamma(f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_d) \wedge mHm'\gamma(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k) = 0;$$

ou encore à

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k) \wedge \gamma^{-1}m'^{-1}Hm^{-1}\gamma(f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_d) = 0;$$

c'est-à-dire

$$\Delta_{d-k}(\gamma^{-1}m'^{-1}Hm^{-1}\gamma) = \{0\}.$$

D'où le lemme.

B. *Démonstration des résultats énoncés dans la partie B de I*

(4.13) Les assertions de (1.7), (1.8) et ((1.9)(i)), excepté la convergence de la suite $\{x'_n\}_{n \geqq 1}$, sont des conséquences immédiates des théorèmes (2.18) et (2.19). Ecrivons: $c^{-1}X_n c = x'_n b'_n k'_n$ (décomposition polaire $H'_\mu = \mathrm{K'A'K'}$). L'image de x'_n dans $\boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ (ou $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}_\Theta$) converge $\mathbf{P}$-p.s.; il existe donc une suite $\{\gamma_n\}_{n \geqq 1}$ d'eléments de $\boldsymbol{K}_\Theta$ telle que la suite $\{x''_n = x'_n\gamma_n\}_{n \geqq 1}$ converge $\mathbf{P}$-a.s.; nous avons alors

$$c^{-1}X_n c = x''_n\gamma_n^{-1}b'_n k'_n = x''_n b'_n \gamma_n^{-1}k'_n,$$

car $\boldsymbol{K}_\Theta$ centralise $\boldsymbol{A}_\Theta$. D'où l'assertion (i) de (1.8).

(4.14) Comme précédemment nous pouvons trouver une décomposition polaire $X_n = x_n\gamma_n^{-1}b_n k_n$ de X_n telle que la suite $\{x_n\}_{n \geqq 1}$ converge $\mathbf{P}$-p.s. vers une v.a. x_∞ et $\forall n \geqq 1$ $\gamma_n \in \boldsymbol{K}_\Theta$.

Ecrivons $b_n = b_n^1 b_n^2$ avec $b_n^1 \in \boldsymbol{A}_\Theta$ et $b_n^2 \in \boldsymbol{A}_\Theta$. Puisque $\boldsymbol{G}_\Theta$ (et donc $\boldsymbol{K}_\Theta$ et $\boldsymbol{A}_\Theta$) centralise $\boldsymbol{A}_\Theta$, nous avons:

$$X_n\,{}^tX_n = x_n(b_n^1)^2(\gamma_n^{-1}(b_n^2)^2\gamma_n)x_n^{-1};$$

et les matrices b_n^1 et $(\gamma_n^{-1}(b_n^2)\gamma_n)$ commutent.

Il s'ensuit que

$$(X_n\,{}^tX_n)^{1/2n} = x_n(b_n^1)^{1/n}(\gamma_n^{-1}(b_n^2)^{1/n}\gamma_n)x_n^{-1};$$

d'où l'assertion (ii) de (1.9) en tenant compte que la composante b_n^2 reste dans un compact de $\boldsymbol{A}_\Theta$ (définition de Θ).

Enfin en reprenant, mot à mot, la démonstration de la proposition (4.9) de [6], on montre que

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,\|\, e_i V^{-1}c^{-1}X_n c \,\| = \tau_i;$$

ce qui entraîne l'assertion (iii) de (1.9).

(4.15) Pour démontrer les résultats de (1.10) nous pouvons évidemment supposer que $H'_\mu = H_\mu$; ou encore que $c = I$.

Ecrivons, pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$S_n = N_n A_n K_n \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa } H'_\mu = N'A'K'\text{)}.$$

Nous avons vu que, quand n tend vers $+\infty$, la suite $\{N_n = u(S_n)\}_{n \geqq 0}$ converge **P**-p.s. vers une v.a. V et

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_i V^{-1} S_n \| = \tau_i .$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, nous avons donc $\bigoplus_{1 \leqq l \leqq i_j} \mathbf{R} e_l V^{-1} \subset V_j^+$. Or nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d) V^{-1} S_n \| &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} | \det(V^{-1} S_n) | \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} | \det A_n | \\ &= \sum_{1 \leqq i \leqq d} \tau_i .\end{aligned}$$

Par suite, pour tous entiers distincts $l, m, \ldots, k$ de $\{1, \ldots, d\}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| (e_l \wedge e_m \wedge \cdots \wedge e_k) V^{-1} S_n \| = \tau_l + \tau_m + \cdots + \tau_k ,$$

et

$$\bigoplus_{1 \leqq l \leqq i_j} \mathbf{R} e_l V^{-1} = V_j^+ .$$

De même, lorsque n tend vers $-\infty$, la suite $\{N_n\}_{n \leqq -1}$ converge vers une v.a. W et

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n \to -\infty} \operatorname{Log} \| e_i W^{-1} S_n \| = -\tau_{d+1-i} .$$

[On obtient ces coefficients en remarquant que, pour $n > 0$, les v.a. S_n et $(S_{-n})^{-1}$ ont même loi (voir [6] (3.9)).]

En outre nous avons

$$\bigoplus_{1 \leqq l \leqq i_j} \mathbf{R} e_l W^{-1} = V_j^- .$$

Ceci dit, en suivant ([6], (4.11)), nous allons exprimer l'espace V_j^- d'une autre façon. Ecrivons, pour $n < 0$,

$$S_n^{-1} = Y_n \cdots Y_{-1} = \tilde{K}_n \tilde{A}_n \tilde{N}_n \quad \text{(décomposition d'Iwasawa } H'_\mu = K'A'\tilde{N}'\text{)}.$$

Les résultats obtenus pour une marche aléatoire droite nous disent, par transposition que, lorsque n tend vers $-\infty$, la suite de v.a. $\{\tilde{N}_n\}_{n\leqq -1}$ converge **P**-p.s. vers une v.a. $\tilde{V}$. Il est facile de voir alors ([6] (4.11)) que

$$\forall i \in \Sigma, \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| e_i \tilde{V} S_n \| = -\tau_i ;$$

si bien que

$$\bigoplus_{ij-1+1 \leqq l \leqq d} \mathbf{R} e_l \tilde{V} = V_j^- .$$

L'image de V [resp. $\tilde{V}$] dans $\boldsymbol{B}_\Theta = \boldsymbol{G}/\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$ [resp. $\tilde{\boldsymbol{B}}_\Theta = \boldsymbol{P}_\Theta \backslash \boldsymbol{G}$] est une v.a. de loi λ [resp. $\tilde{\lambda}$] irréductible; il s'ensuit que, **P**-p.s., pour tous $g \in \boldsymbol{G}$ et $k \in d - \boldsymbol{\Theta}$, $\Delta_k(gV) \neq 0$ et $\Delta_k(\tilde{V}g) \neq 0$. Comme les v.a. V et $\tilde{V}$ sont manifestement indépendantes, on en déduit que, **P**-p.s., pour tout $k \in d - \boldsymbol{\Theta}$, $\Delta_k(\tilde{V}V) \neq 0$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, nous avons alors $\mathbf{R}^d = V_j^+ \oplus V_j^-$. [En effet dans le cas contraire on aurait, **P**-p.s.,

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i_j}) V^{-1} \wedge (e_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge e_d) \tilde{V} = 0,$$

et par suite $\Delta_{d-i_j}(\tilde{V}V) = 0$.]

Si bien que l'espace $V_j^+ \cap V_j^-$ est, **P**-p.s., de dimension $d_j = i_j - i_{j-1}$.

(4.17) Considérons les v.a.

$$V(g, .) = \lim_{n\to+\infty} u(gY_0 \cdots Y_{n-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{V}(g, .) = \lim_{n\to-\infty} \tilde{u}(Y_n \cdots Y_{-1} g);$$

où pour $g \in \boldsymbol{G}$, on note $\tilde{u}(g)$ la composante sur $\tilde{\boldsymbol{N}}$ de g dans la décomposition d'Iwasawa $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{N}}$. Pour $g = I$, nous retrouvons les v.a. V et $\tilde{V}$ précédentes.

En projection sur $\boldsymbol{B}_\Theta$, nous avons $V(g, .) . \partial_\Theta = gV . \partial_\Theta$. Par suite, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $V^{-1} S_n V \circ \theta^n . \partial_\Theta = \partial_\Theta$ et la matrice $V^{-1} S_n V \circ \theta^n$ appartient, **P**-p.s., au sous-groupe de matrices $\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta$, ou encore à $\tilde{\boldsymbol{P}}_\Theta \cap H'_\mu = \Gamma A' \tilde{N}'$.

De la même façon, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la matrice $\tilde{V} \circ \theta^n S_n^{-1} \tilde{V}^{-1}$ appartient, **P**-p.s., au sous-groupe $N'A'\Gamma$. Il en est de même pour la matrice inverse $\tilde{V} S_n \tilde{V}^{-1} \circ \theta^n$.

Puisque, **P**-p.s., $\Delta_k(\tilde{V}V) \neq 0$ $\forall k \in d - \boldsymbol{\Theta}$, la matrice $\tilde{V}V$ s'écrit: $\tilde{V}V = NP$ avec $N \in N'$ et $P \in \Gamma A' \tilde{N}'$. Pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$, les matrices $PV^{-1} S_n (VP^{-1}) \circ \theta^n$ et $N^{-1} \tilde{V} S_n (\tilde{V}^{-1} N) \circ \theta^n$ sont alors égales et appartiennent donc nécessairement au groupe de matrices $\Gamma A'$. Ces matrices ne vérifient pas les propriétés voulues; nous devons donc les modifier.

Ecrivons $PV^{-1} = uak$ avec $u \in N'$, $a \in A'$, $k \in K'$ et appelons Φ la matrice $VP^{-1}a$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la matrice $D_n = \Phi^{-1}S_n\Phi \circ \theta^n$ appartient à $\Gamma A'$; écrivons $D_n = \mathrm{diag}(c_1(n)I_1, \ldots, c_{s+1}(n)I_{s+1})\gamma_n$ avec $\gamma_n \in \Gamma$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, nous posons $v_j = e_{i_{j-1}+1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}$ et $d_j = i_j - i_{j-1}$. Nous munissons chaque produit extérieur de $\mathbf{R}^d$ de la norme euclidienne associée à sa base canonique. Nous avons:

$$\| v_j\Phi^{-1}S_n \| = \| v_jD_n(\Phi^{-1} \circ \theta^n) \| = (c_j(n))^{d_j} \| v_j\Phi^{-1} \circ \theta^n \| .$$

D'après ce qui précède, nous savons que, pour tous entiers distincts $l, m, \ldots, q$ de $\{1, \ldots, d\}$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| (e_l \wedge e_m \wedge \cdots \wedge e_q)\Phi^{-1}S_n \| = \tau_l + \tau_m + \cdots + \tau_q .$$

Comme $\det \Phi^{-1} = 1$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leqq j \leqq s+1} \operatorname{Log} c_j(n) = \sum_{1 \leqq j \leqq s+1} d_j\lambda_j .$$

D'autre part, puisque Φ^{-1} appartient à $N'K'$, nous avons:

$$\forall j \in \{1, \ldots, s+1\}, \qquad \| v_j\Phi^{-1} \circ \theta^n \| \geqq 1.$$

Il est alors clair que pour tout $j \in \{1, \ldots, s+1\}$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| v_j\Phi^{-1} \circ \theta^n \| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_j(n) = \lambda_j .$$

D'où l'on déduit aisément le résultat anoncé.

REMARQUES.

(1) Les groupes H_μ qui apparaissent dans l'étude précédente semblent former une classe très restreinte; en particulier ils préservent une structure conforme généralisée sur une sous-variété algébrique d'un espace de drapeaux de $\mathbf{R}^d$ associé à une partie Θ de Σ. On peut se demander quelles sont les parties Θ possibles et comment construire les groupes H_μ correspondants, ou au moins les groupes maximaux correspondant à un Θ donné.

(2) Les résultats précédents ont été obtenus en utilisant l'adhérence algébrique T_μ de H_μ; cette méthode est liée au fait qu'exprimer l'égalité en valeur absolue de deux valeurs propres d'une matrice revient à écrire une équation algébrique, ce qui n'est plus le cas sur un corps local tel que le corps

p-adique. Cependant une partie essentielle des résultats s'exprime sans faire intervenir H_μ il en est ainsi, par exemple, de la réduction, par cohomologie, d'un produit de matrice à une forme diagonale par blocs de similitudes. On peut se demander si de tels résultats restent valables sur un corps local autre que **R** ou **C**.

Le théorème ergodique multiplicatif reste valable dans ce cadre [9] mais il n'en est pas de même des résultats plus précis obtenus ici: par exemple le groupe compact des matrices à coefficients entiers p-adiques est algébriquement dense dans le groupe des matrices unimodulaires à coefficients p-adiques et les multiplicités des exposants de Liapunoff ne peuvent donc pas s'exprimer de façon analogue à celle développée ici.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Azencott, *Espaces de Poisson des groupes localement compacts*, Lecture Notes No. 148, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

2. A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.

3. P. Bougerol and J. Lacroix, *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, Progress in Probability and Statistics **8**, Birkhaüser, 1985.

4. H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math. **26** (1972), 193–229.

5. I. Y. Goldsheid and G. A. Margulis, *Simplicity of the Liapunoff spectrum for products of random matrices*, Soviet Math. **35** (2) (1987), 309–313.

6. Y. Guivarc'h and A. Raugi, *Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb **69** (1985), 187–242.

7. Y. Guivarc'h and A. Raugi, *Products of random matrices: convergence theorems*, Contemporary Mathematics, Am. Math. Soc. **50** (1986), 31–53.

8. V. I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem*, Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), 197–231.

9. M. S. Ragunathan, *A proof of Oseledec multiplicative theorem*, Isr. J. Math. **32** (1979), 356–362.

10. A. Raugi, *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes*, Bull. Soc. Math. France, mémoire **54**, 1977.

11. R. Zimmer, *Ergodic Theory and Semi-simple Groups*, Birkhauser, Boston–Basel–Stuttgart, 1984.